

«СОГЛАСОВАНО»
Экспертным советом
Ценового центра НКО АО НРД
(протокол № 40 от «16» мая 2023 г.)

Методика определения стоимости еврооблигаций Правительства РФ

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Активный рынок – рынок, на котором сделки с данной облигацией заключаются с достаточной частотой и в достаточном объеме, чтобы обеспечить информацию о ценах на регулярной основе. В данной Методике под показателем активности рынка принимается наличие достоверных сделок в течение последнего торгового дня, а также наличие рыночной информации в течение 30 календарных дней (в соответствии со значением управляющего параметра Методики – Приложение 1 Методики определения стоимости рублевых облигаций), где торговые дни определяются в соответствии с торговым календарем, публикуемым Московской Биржей¹.

Внебиржевые сделки – сделки, заключенные вне централизованных торговых площадок, информация по которым раскрывается на Московскую Биржу в соответствии с Приказом ФСФР РФ № 06-67/пз-н «Об утверждении Положения о предоставлении информации о заключении сделок»², а также в рамках отчетности участников в соответствии с MIFID II (The Markets in Financial Instruments Directive).

Достоверные сделки – сделки, удовлетворяющие критерию достоверности, описанному в главе 3 Методики.

Еврооблигации РФ – облигации внешних и внутренних облигационных займов Российской Федерации, размещенные на международном рынке капитала и выпускаемые Министерством финансов Российской Федерации³.

Кривая Казначейских облигаций США – бескупонная кривая доходности, построенная по данным, публикуемым Департаментом Казначейства США⁴ на ежедневной основе. Интерполяция между ключевыми точками – кубические сплайны.

Корректировка кредитного спреда к кривой Казначейских облигаций США – фиксированная надбавка к кредитному спреду (каждому элементу массива спредов), определяющая изменение кредитного риска Российской Федерации и отсутствию достоверной рыночной информации и активного рынка по всем выпускам еврооблигаций РФ.

Кредитный спред доходности еврооблигаций РФ к кривой Казначейских облигаций США (кредитный спред) – массив спредов между бескупонной кривой доходности еврооблигаций РФ, построенной в соответствии с главой 4 Методики и кривой доходности Казначейских облигаций США, рассчитанных в ключевых точках кривой Казначейских облигаций США.

Котировки – ценовые данные и индикативы, полученные с централизованных торговых площадок (в том числе, с Московской Биржи и иностранных торговых площадок⁵), а также в рамках фиксинга НФА⁶.

¹ На момент согласования Методики календарь торговых дней публикуется на официальном сайте Московской Биржи по адресу <https://www.moex.com/s223>.

² На момент согласования Методики данные по внебиржевым сделкам раскрываются на официальном сайте Московской Биржи по адресу <https://www.moex.com/s1619>.

³ На момент согласования Методики данные по активным выпускам еврооблигаций РФ размещаются на сайте Министерства финансов Российской Федерации по адресу https://www.minfin.ru/ru/performance/public_debt/external/param/.

⁴ На момент согласования Методики публикация производится на официальном сайте Департамента Казначейства США по адресу <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield>.

⁵ Список используемых источников раскрывается на <https://nsddata.ru/ru/documents> в разделе «Ценовой центр НРД».

⁶ На момент согласования Методики фиксинг НФА рассчитывается при наличии не менее чем 5 котировок от участников рынка и публикуется на ежедневной основе на <http://www.nfa.ru/?page=fixing>.

Методика – настоящая Методика определения стоимости еврооблигаций Правительства РФ.

Московская Биржа – Публичное акционерное общество «Московская Биржа ММВБ-РТС»

МСФО 13 – Международный стандарт финансовой отчетности (IFRS) 13 «Оценка справедливой стоимости».

Облигация с простой структурой денежных потоков – облигация, для которой на момент размещения известны все будущие выплаты (в том числе, купоны и амортизационные выплаты).

Основной рынок – рынок с наибольшим объемом торгов и уровнем активности для данной облигации. Для еврооблигаций РФ основным рынком является внебиржевой.

Рыночные данные – данные (цены, объемы и т.д.) фактически совершенных биржевых и внебиржевых сделок, котировки.

Справедливая стоимость – ожидаемая цена, которая могла бы быть получена при совершении сделки купли-продажи по облигации на дату оценки в ходе совершения обычной сделки между хорошо осведомленными и независимыми друг от друга участниками рынка.

Ценная бумага, включенная в 1-2 уровень листинга Московской Биржи – ценные бумаги, включенные в список ценных бумаг, допущенных к торгам на Московской бирже, и входящие в первый или второй уровень листинга в соответствии с информацией, раскрываемой Московской Биржей.

1. Общие положения

- 1.1 Методика устанавливает способ определения справедливой стоимости облигаций облигационных займов Российской Федерации, размещенных на международном рынке капитала (еврооблигации РФ). Методика может применяться для определения цены в целях переоценки портфелей участников рынка и их клиентов, финансовой отчетности, оценки стоимости обеспечения по сделкам (в том числе, по сделкам РЕПО с Федеральным Казначейством на корзину ценных бумаг).
- 1.2 Методика предназначена для оценки еврооблигаций РФ, номинированных и осуществляющих выплаты в долларах, евро и др. валютах, имеющих простую структуру денежных потоков и входящих в 1-2 уровень листинга Московской Биржи. Оценка еврооблигаций РФ, номинированных и осуществляющих выплаты в евро или др. валюте, производится с учетом Приложения 2.
- 1.3 Методика основана на принципах, изложенных в Международном стандарте финансовой отчетности МСФО (IFRS) 13, и использует трехуровневую иерархию методов оценки справедливой стоимости в соответствии с уровнями исходных данных. При наличии рыночных данных, приоритет отдается наблюдаемым внебиржевым и биржевым ценам. В случае отсутствия активного рынка и достоверных сделок в течение дня, оценка стоимости облигации производится на основе модели дисконтирования денежных потоков с учетом рыночной информации по аналогичным выпускам или без ее учета при отсутствии активного рынка по всем аналогичным выпускам.
- 1.4 Рассчитанная в соответствии с Методикой стоимость еврооблигаций РФ призвана с определенным уровнем достоверности определить справедливую стоимость на определенную дату. Интервал допустимых значений справедливой стоимости призван с 90% вероятностью определить границы достоверности оценки справедливой стоимости. Определение стоимости облигации производится без учета влияния на нее объема совершаемой контрагентами сделки и может приниматься как стоимость сделки характерного для данной облигации объема. Методика может в недостаточной мере учитывать волатильность конкретной облигации относительно волатильности рынка еврооблигаций РФ при отсутствии достоверных внебиржевых и биржевых сделок и рыночной информации по данному выпуску еврооблигаций РФ.
- 1.5 Термины и определения, не установленные в Методике, применяются в значениях, установленных внутренними документами НКО АО НРД, документами, регламентирующими порядок проведения торгов и расчета информационных показателей в ПАО Московская биржа, а также нормативными правовыми актами Банка России, законами и иными нормативными правовыми актами Российской Федерации.
- 1.6 Методика, а также все изменения и дополнения в нее утверждаются Председателем Правления НКО АО НРД при согласовании с Экспертным советом и вступают в силу с даты, определяемой решением Председателем Правления НКО АО НРД.
- 1.7 Информация об утверждении и вступлении в силу Методики, а также изменений и дополнений в нее раскрывается на сайте НКО АО НРД не позднее, чем за 2 недели до даты вступления их в силу.

2. Порядок определения стоимости Еврооблигаций РФ

- 2.1 Определение справедливой стоимости $P_i(t)$ для i -ого выпуска еврооблигаций РФ на время t , а также интервала допустимых значений справедливой стоимости $[D_i(t); U_i(t)]$ основывается на применении каскада из трех методов, в соответствии с уровнем исходных данных:
- метод рыночных цен;
 - метод дисконтированного денежного потока (с использованием данных по рынку еврооблигаций РФ);
 - метод смещенного дисконтированного денежного потока (с использованием данных по рынку казначейских облигаций США).
- 2.2 Первый уровень оценки использует рыночный подход, второй и третий уровень используют доходный подход. Выбор одного из трех методов расчета справедливой цены определяется доступностью и степенью достоверности рыночной информации. На первом уровне используется информация по внебиржевым сделкам по данному выпуску еврооблигаций РФ, на втором уровне используется рыночная информация по всем выпускам еврооблигаций РФ, на третьем уровне используются индикативные данные по рынку Казначейских облигаций США, а также оценка кредитного риска Российской Федерации в виде кредитного спреда.
- 2.3 Первый уровень оценки – метод рыночных цен – применим, если в течение дня на основном рынке с бумагой были совершены достоверные сделки с данной облигацией, по которым возможен расчет справедливой рыночной цены. В этом случае справедливая стоимость облигации определяется как медиана цен достоверных сделок, взвешенная по объемам.
- 2.4 Второй уровень оценки – метод дисконтированного денежного потока – применим при отсутствии достоверных сделок по облигации в течение торгового дня, при наличии рыночной информации по другим выпускам еврооблигаций РФ. Для долларовых выпусков справедливая стоимость определяется как приведенная стоимость будущих денежных потоков. Кривая дисконтирования строится по доходностям выпусков еврооблигаций РФ, для которых определена справедливая рыночная цена на первом уровне оценки, а также доступны рыночные данные – наблюдаются заявки и сделки на иностранных биржевых и внебиржевых площадках.
- 2.5 Третий уровень оценки – метод смещенного дисконтированного денежного потока – применяется при отсутствии рыночной информации по выпускам еврооблигаций РФ, то есть когда не применимы первый и второй уровни оценки. В такой ситуации для оценки теоретической справедливой стоимости еврооблигаций РФ необходимо учесть кредитный риск Российской Федерации, а также процентный риск. Соответственно, приведенная стоимость будущих денежных потоков рассчитывается с учетом временной структуры доходностей Казначейских облигаций США и наблюдаемого кредитного спреда доходности еврооблигаций РФ к кривой Казначейских облигаций США. В случае изменения кредитного рейтинга РФ и отсутствия наблюдаемого кредитного спреда, соответствующего данному рейтингу, применяется корректировка кредитного спреда. Корректировка кредитного спреда определяется методической рабочей группой на основе данных по доходностям облигаций с соответствующими кредитными рейтингами и является одним из управляющих параметров Методики.
- 2.6 Управляющими параметрами Методики являются (значения управляющих параметров устанавливаются Методической рабочей группой и фиксируются в Приложении 1 к Методике):
- Значение предельной форвардной ставки для долларовой кривой еврооблигаций РФ ω ;
 - Параметры сглаживания λ_{trades} , λ_{quotes} и скорости сходимости α ;

- с) Количество выпусков, по которым необходимо наличие рыночных данных;
- д) Вмененная значимость рыночных данных, не являющихся ценами фактических сделок, $q_{internal}$;
- е) Количество дней, в течение которого нет рыночных данных по выпуску;
- ф) Корректировка кредитного спреда к кривой доходности Казначейских облигаций США z_T .

3. Метод рыночных цен

- 3.1 Метод рыночных цен предназначен для определения справедливой цены еврооблигации РФ в случае, когда в течение дня с облигацией совершены 1 или более сделок, признанных достоверными. Если в течение торгового дня на основном или ином активном и доступном участникам рынке были зафиксированы достоверные сделки, то справедливая рыночная цена облигации рассчитывается как медиана цен таких сделок, взвешенная по объемам.
- 3.2 Справедливая стоимость, рассчитанная по методу рыночных цен, соответствует ожидаемой цене по сделке характерного для данной облигации объема и не учитывает влияние объема, например, значительно превышающего средний дневной объем торгов.
- 3.3 На момент написания Методики основным рынком для еврооблигаций РФ является внебиржевой рынок. При этом с учетом предположения об обязательной доступности рынка для российских участников, ключевой считается информация по внебиржевым сделкам, по которым хотя бы одной из сторон является участник, имеющий доступ к торгам на Московской Бирже. Соответствующая информация раскрывается участниками в рамках отчетности по внебиржевым сделкам с инструментами, входящими в 1-2 уровень листинга Московской Биржи. Дополнительно учитывается информация по внебиржевым сделкам, раскрываемая международными участниками в рамках обеспечения прозрачности после совершения сделок в соответствии с MIFID II. Однако поскольку раскрытие информации по внебиржевым сделкам производится участниками как автоматически, так и в ручном режиме, необходима фильтрация недостоверных данных. Появление недостоверных рыночных данных обусловлено операционными ошибками участников и наличием информации по сделкам, не являющимися обычными, в общем массиве данных. Информация о фактических сделках с оцениваемым выпуском еврооблигаций РФ относится к первому уровню исходных данных.
- 3.1 Метод рыночных цен применяется для облигаций, для которых совершено 50 и более сделок.
- 3.2 Количество сделок S — граница применения дополнительной фильтрации с использованием исторических данных для метода рыночных цен — определяет, достаточно ли сделок с оцениваемым выпуском облигаций, чтобы определять достоверность заключенных сделок только по данным даты оценки. В случае, если сделок S или меньше либо объем сделок S_V или меньше, для фильтрации дополнительно используются исторические данные (данные последней даты оценки, на которую была рассчитана цена по методу рыночных цен). Если Методической рабочей группой не согласовано иное, минимальным количеством принимается S , минимальным объемом S_V
- 3.3 Пусть k – рассматриваемое количество календарных дней истории ($k \geq 1$), используемое для оценки параметров метода рыночных цен. Необходимо, чтобы в период экспирации данных по первому методу $[T - k, T - 1]$ попало минимум N_{\min} сделок, значение k выбирается как минимальный период в днях из количества доступных дней истории и минимального периода, в который одновременно попадает N_{\max} сделок и K_{\max} дней истории (при наличии такого периода);

μ_t – справедливая рыночная цена t -го дня ($t \in [T - k; T - 1]$), V_{it} – объем i -ой сделки (в штуках) t -го дня.

3.4 Пусть сделки внутри дня распределены как:

$$p \sim f(p | \mu, \zeta^2, \alpha, V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta^2 + 2\alpha \ln(V + 1)}} \exp\left(-\frac{\max(0, |p - \mu| - \alpha \ln(V + 1))^2}{2\zeta^2}\right),$$

Цены дней распределены:

$$\mu \sim f(\mu | \mu_{pr}, \zeta^2, \alpha, \Sigma V, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta^2 + 2\alpha\sqrt{\Delta t} \ln(\Sigma V + 1)}} \exp\left(-\frac{\max(0, |\mu - \mu_{pr}| - \alpha\sqrt{\Delta t} \ln(\Sigma V + 1))^2}{2\zeta^2}\right),$$

где μ – итоговая цена на дату оценки, μ_{pr} – итоговая цена за предыдущую дату оценки, Δt – количество календарных дней с даты оценки μ_{pr} , ΣV – суммарный объем за день, α – корректировка на объем. Алгоритм вычисления квантилей для распределений с плотностью f приведен в Приложении 4 к Методике.

Псевдодисперсия сделок внутри дня – отклонение сделок относительно справедливой цены μ_t на дату оценки:

$$\zeta_{\mu_t}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K_t} w_{it} \max(0, |\mu_t - p_{it}| - \alpha \ln(V_{it} + 1))^2}{\frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{K_t} w_{it}},$$

Псевдодисперсия сделки:

$$\zeta_{it}^2 = w_{it} \zeta_{\mu_t}^2,$$

где V_{it} – объем i -ой сделки t -го дня; α – корректировка на объем, рассчитываемая для рассматриваемого дня T ; K_t – количество совершенных сделок внутри t -го дня; w_{it} – вес i -ой сделки дня t , рассчитываемый по формуле $w_{it} = \ln(V_{it} + 1)$. Значение w_{it} рассчитывается аналогично величине зависимости корректировки цены от объема, но в силу другого смысла данного показателя используется другое обозначение.

Псевдодисперсия справедливой цены:

$$\zeta_t^2 = \max(0, |\mu_t - \mu_{prev}| - \alpha\sqrt{\Delta t} \ln(V_t + 1))^2,$$

где V_t – сумма объемов сделок для t -го дня, $V_t = \sum_{i=1}^{K_t} V_{it}$; $prev$ – ближайший предшествующий дню t день, в который была цена 1-го метода; Δt – срок в календарных днях между t и $prev$.

3.8 Корректировка на объем находится путем минимизации логарифмической функции правдоподобия:

$$\ln L = \sum_{t=T-k}^{T-1} \sum_{i=1}^{K_t} \ln\left(\sqrt{2\pi w_{it} \zeta_{\mu_t}^2 + 2\alpha \ln(V_{it} + 1)}\right) + \sum_{t=T-k+1}^{T-1} \ln\left(\sqrt{2\pi \zeta_t^2 + 2\alpha\sqrt{\Delta t} \ln(V_t + 1)}\right),$$

при этом $\alpha \geq 0$.

- 3.9 Определим значение справедливой рыночной цены μ_T как результат минимизации⁷ следующего выражения внутри рассматриваемого дня T :

$$\sum_{i=1}^{K_T} \ln \left(\sqrt{2\pi w_{iT} \zeta_{\mu_T}^2} + 2\alpha \ln(V_{iT} + 1) \right).$$

μ_T признается итоговым для дня T в том случае, когда все рассматриваемые сделки в данный день были признаны достоверными. В противном случае производится фильтрация: на каждом ее шаге недостоверные сделки отбрасываются, значение справедливой рыночной цены пересчитывается. Процесс фильтрации прекращается, если значение справедливой рыночной цены на текущем шаге фильтрации совпадает со значением, рассчитанным на предыдущем шаге, и если количество рассматриваемых сделок не уменьшилось. В том случае, если все сделки были признаны недостоверными, метод рыночных цен не применяется и данный выпуск оценивается в соответствии с методом дисконтированного денежного потока или методом индексного дисконтированного денежного потока, описанными в главе 4 и главе 5 Методики соответственно.

- 3.10 Сделка признается достоверной, если цена сделки не выходит за пределы коридора фильтрации:

$$p_{iT} \in [Q_1(f(p | \mu_T, \zeta_{\mu_T}^2, \alpha, V_T)); Q_{99}(f(p | \mu_T, \zeta_{\mu_T}^2, \alpha, V_T))],$$

где $f(p)$ – плотность распределения справедливой рыночной цены μ_T ; Q_1 и Q_{99} – 1% и 99% квантили распределения с плотностью f соответственно.

- 3.11 Если общее количество сделок или объем сделок, оставшихся в результате предыдущего шага фильтрации, в рассматриваемый день меньше S и S_V соответственно, то для установления достоверности сделки кроме описанного в пункте 3.10 Методики условия добавляется требование относительно справедливой рыночной цены предыдущего рассматриваемого дня:

$$p_{iT} \in [Q_1(f(p | \mu_{prev}, \zeta_{\mu_T}^2, \alpha, V_T)); Q_{99}(f(p | \mu_{prev}, \zeta_{\mu_T}^2, \alpha, V_T))].$$

- 3.12 Среди сделок, признанных недостоверными, исключается из расчета сделка с наибольшим расстоянием цены до интервалов, указанных в пунктах 3.10 и 3.11. Методики. Затем ищется новое значение справедливой цены μ_T , оставшиеся сделки проверяются на достоверность. Процесс повторяется до признания всех оставшихся сделок достоверными, либо признания всех сделок недостоверными.

- 3.13 Итоговая цена на дату оценки T определяется как:

$$P_1(T) = Q_{50} \left(f(p | \mu_T, \zeta_{\mu_T}^2, \alpha, V_T) \right).$$

⁷ Процедура робастной минимизации представляет собой итерационный алгоритм цензурирования данных. На каждом шаге для всех сделок оценивается величина соответствующих членов функции правдоподобия. Сделки, для которых величина ошибки превышает $2.795 \cdot \sigma$ (где σ – стандартное отклонение ошибки модели) исключаются из рассмотрения на следующем шаге. Алгоритм цензурирования останавливается, если на очередном шаге не происходит отсеивания наблюдений

3.14 Коридор достоверности цены определяется как:

$$[D_1(T); U_1(T)] = [Q_{2.5}(f(p | \mu_T, \zeta_{\mu_T}^2, \alpha, V_T)); Q_{97.5}(f(p | \mu_T, \zeta_{\mu_T}^2, \alpha, V_T))].$$

4. Метод дисконтированного денежного потока

4.1 Метод применяется для определения цены еврооблигаций РФ в случае, когда по данной еврооблигации не может быть определена цена по методу рыночных цен, однако наблюдаемых данных по аналогичным выпускам достаточно для построения кривой доходности⁸. Если методической рабочей группой не согласовано иное, предлагается принять минимальное количество точек для построения кривой доходности равной 3, наличие точки определяется как наличие достоверной цены не ранее, чем в течение последних 30 календарных дней – в соответствии со значением управляющих параметров Методики.

4.2 Методика построения кривой доходности, используемой для дисконтирования, описана в Приложении 3 настоящей Методики.

В соответствии с Приложением 3 Методики, постоянными входными параметрами для построения бескупонной кривой доходности являются: параметр скорости сходимости α , предельная форвардная ставка ω и параметр сглаживания λ . Если иное не установлено методической рабочей группой и Экспертным советом и не отражено в Приложении 1 к Методике, параметр скорости сходимости $\alpha = 0,05$, параметры сглаживания $\lambda_{trades} = 10$ для цен, рассчитанных по методу рыночных цен, и $\lambda_{quotes} = 100$ для рыночных данных, не являющихся ценами фактических сделок. Предельное значение форвардной ставки, если иное не установлено Методической рабочей группой, определяется как:

$$\omega = \ln(1 + r),$$

где r – усредненная долгосрочная доходность государственных облигаций развивающихся стран как⁹.

4.3 В дополнение к Приложению 3 Методики, в настоящей Методике дневной параметр меры точности для цен, рассчитанных по методу рыночных цен, для заданного выпуска еврооблигаций РФ приравнивается к $m^{prev\ day} = \Delta^{prev\ day}$, в соответствии с определением показателя достоверности сделок по методу рыночных цен. Таким образом, $\delta^{tod} = \theta * \delta^{prev\ day} + (1 - \theta)\Delta^{prev\ day}$, мера точности $q_{trades} = \max(\delta^{tod}; \Delta^{tod})$.

Для рыночных данных, не являющихся ценами, рассчитанными по методу рыночных цен, (индикативные котировки и фиксинги), мера точности определяется с учетом поправки на значимость рыночных данных. Мера точности для таких рыночных данных $q_{quotes} = q_{trades} * q_{internal}$, где вмененная значимость $q_{internal}$, если иное не установлено методической рабочей группой и Экспертным советом и не отражено в Приложении 1 к Методике:

⁸ Для еврооблигаций РФ, номинированных и осуществляющих выплаты в евро, дополнения к алгоритму построения кривой доходности приведены в Приложении 2 к Методике.

⁹ Предельное значение форвардной ставки устанавливается исходя из усредненных долгосрочных доходностей государственных облигаций развивающихся стран, входящий в JP Morgan Emerging Markets Bond ETF. На момент согласования Методики параметры EMB ETF публикуются на <https://www.ishares.com/us/products/239572/ishares-jp-morgan-usd-emerging-markets-bond-etf>.

$$q_{internal} = 1 + \frac{|high - low|}{q_{trades}}$$

для индикативных котировок с биржевых и внебиржевых площадок,

$$q_{internal} \in [1; 2]$$

для фиксингов, причем вмененная значимость равна 1 при формировании фиксинга по котировкам 10 и более участников и равна 2 при формировании фиксинга по котировкам 5 участников. Для промежуточного количества участников распределение равномерное¹⁰.

4.4 Цена облигации по методу дисконтированного денежного потока рассчитывается как:

$$P_2(t) = \sum \frac{CF_i}{(1 + r_T)^T} - AI,$$

где CF_i – i -ый денежный поток по облигации, r_T – ставка дисконтирования на время T в годах до выплаты денежного потока, рассчитанная по кривой доходности еврооблигаций РФ, AI – накопленный купонный доход по облигации.

4.5 Коридор достоверности цены определяется через 90% годовой квантиль ошибок цен второго метода относительно метода рыночных цен:

$$[D_2(t); U_2(t)] = [\min(P_2(t) - \varepsilon_2, P_2(t) - \varepsilon_c); \max(P_2(t) + \varepsilon_2, P_2(t) + \varepsilon_c)]$$

где

$$\varepsilon_2 = Q_{95}(|P_2(t) - P_1(t)|),$$

ε_c – оценка 95% квантиля ошибки, полученная из ковариационной матрицы дисконт-факторов кривой с учетом предположения о нормальности распределения дисконт-факторов.

В случае невозможности оценить ε_2 (менее 50 сделок за календарный год – 365 календарных дней), используется только ошибка модели.

5. Метод смещенного дисконтированного денежного потока

5.1 Метод смещенного дисконтированного денежного потока применяется для определения цены еврооблигации РФ в случае, когда невозможно определение цены по методу рыночных цен или методу дисконтированного денежного потока¹¹.

5.2 Отсутствие оценки еврооблигации РФ по методу рыночных цен и методу дисконтированного денежного потока означает значительное сокращение ликвидности на рынке российского внешнего долга. В таком случае для корректного учета процентного риска используются ставки бескупонной доходности Казначейских облигаций США, публикуемые Департаментом Казначейства

¹⁰ Под равномерным распределением понимается присвоение веса $q_{internal} = -\frac{1}{5}Num_Parties + 3$, где $Num_Parties$ – количество участников для количества участников от 2 до 4 включительно.

¹¹ Для еврооблигаций РФ, номинированных и осуществляющих выплаты в евро, алгоритм построения кривой доходности приведен в Приложении 2 к Методике.

США. Применяется интерполяция кубическими сплайнами между ключевыми точками. Данная кривая доходности определяет значение ставки r_t для соотв. срочности.

5.3 Для учета кредитного риска еврооблигаций РФ рассчитывается кредитный спред Z доходности еврооблигаций РФ к кривой Казначейских облигаций США. Кредитный спред рассчитывается как разница бескупонных доходностей по кривой еврооблигаций РФ и кривой Казначейских облигаций США во всех ключевых точках последней. Если невозможно построить актуальную кривую доходности еврооблигаций РФ, используется кредитный спред последнего известного состояния кривой доходности еврооблигаций РФ, что позволяет учесть рост доходности еврооблигаций РФ при ухудшении кредитного качества.

5.4 Цена облигации по методу чистого дисконтированного денежного потока рассчитывается как:

$$P_3(t) = \sum \frac{CF_i}{(1 + R_{t_i} + z_T)^{t_i}} - AI,$$

где $R_{t_i} = (r_t + Z_{t_i})$ – ставка дисконтирования для соответствующей срочности, Z_{t_i} – значение кредитного спреда для соответствующей срочности, $z_T = 0$ (если не согласовано иное в соответствии с пунктом 5.5. Методики) – корректировка кредитного спреда еврооблигации РФ к кривой доходности Казначейских облигаций США.

5.5 В случае пересмотра кредитного рейтинга Российской Федерации со стороны тройки международных кредитных рейтинговых агентств, вводится дополнительная корректировка кредитного спреда еврооблигаций РФ к кривой Казначейских облигаций США z_T . Корректировка кредитного спреда определяется на основе всей доступной на момент смены рейтинга информации по: динамике доходностей облигаций федерального займа, размещенных на внутреннем рынке капитала, спредах и динамике цен CDS контрактов на облигации федерального займа РФ, динамике облигационных индексов и ETF развивающихся стран, кредитным спредам и спредам CDS для стран, входящих в соответствующие рейтинговые группы. Окончательно значение корректировки согласуется Экспертным советом НРД по ценам как управляющий параметр Методики.

5.6 Для оценки коридора достоверности цены по методу смещенного дисконтированного денежного потока на каждую дату, на которую возможен расчет по методу рыночных цен, рассчитывается набор отклонений

$$\varepsilon_{3_i} = |P_{3_i} - P_1|, i \in [1; 365]$$

Здесь P_{3_i} – цена, рассчитанная на текущую дату по методу смещенного дисконтированного денежного потока в предположении использования кредитных спредов, рассчитанных по кривой доходности еврооблигаций РФ, известной за i дней до текущей даты. Для распределений таких $\varepsilon_{3_i}(t)$, полученных за последний календарный год (365 календарных дней) рассчитываются 95% квантили.

5.7 Коридор достоверности цены определяется как:

$$[D_3(t); U_3(t)] = [P_3(t) - \varepsilon_3(t - t_{last P_1}); P_3(t) + \varepsilon_3(t - t_{last P_1})],$$

где $\varepsilon_3(t - t_{last P_1}) = Q_{95}(\varepsilon_{3_i}(t))$.

Приложение 1

Значения управляющих параметров Методики:

- a) Значение предельной форвардной ставки для долларовой кривой еврооблигаций РФ

$$\omega = \ln(1 + 0,056) \approx 5,4\%$$

- b) Параметры сглаживания $\lambda_{trades} = 10$, $\lambda_{quotes} = 100$ и скорости сходимости $\alpha = 0,05$;

- c) Количество выпусков, по которым необходимо наличие рыночных данных – 3;

- d) Вмененная значимость рыночных данных, не являющихся ценами фактических сделок, $q_{internal}$:

$$q_{internal} = 1 + \frac{|high - low|}{q_{trades}}$$

для индикативных котировок с биржевых и внебиржевых площадок,

$$q_{internal} \in [1; 2]$$

для фиксингов, причем вмененная значимость равна 1 при формировании фиксинга по котировкам 10 и более участников и равна 2 при формировании фиксинга по котировкам 5 участников. Для промежуточного количества участников распределение равномерное;

- e) Количество дней, в течение которого нет рыночных данных по выпуску – 30 календарных дней;

- f) Корректировка кредитного спреда к кривой доходности Казначейских облигаций США $z_T = 0$.

Приложение 2

Оценка еврооблигаций РФ, номинированных и осуществляющих выплаты в евро или др. валют производится с учетом следующих пунктов:

- а) Для конвертации ставки доходности в долларах в ставку доходности в другой иностранной валюте применяется следующая формула:

$$r_{USD}^{CURR}(\tau) = \frac{\ln\left(\frac{\exp(r_{USD}(\tau) \cdot \tau) \cdot f x_{CURR}^{USD}(0)}{f x_{CURR}^{USD}(\tau)}\right)}{\tau} = r_{USD}(\tau) + \frac{\ln f x_{CURR}^{USD}(0) - \ln f x_{CURR}^{USD}(\tau)}{\tau},$$

где $r_{USD}^{CURR}(\tau)$ – доходность в иностранной валюте на срочность τ , $r_{USD}(\tau)$ – доходность в долларах на срочность τ , $f x_{CURR}^{USD}(\tau)$ – форвардный курс конвертации валют из иностранной валюты в доллар на срочность τ ;

- б) Параметр сглаживания $\lambda_{currency} = 1$;
- в) Количество выпусков, по которым необходимо наличие рыночных данных – 1;
- д) В дополнение к главе 4 Методики в качестве наблюдений точек кривой используются наблюдения ставок доходности в иностранных валютах, полученные конвертацией ставок доходности по формуле из пункта а) настоящего Приложения из долларовой кривой еврооблигаций РФ, на срочности ON (овернайт) и 10 лет: $r_{USD}^{CURR}(ON)$, $r_{USD}^{CURR}(10)$;

Мера точности для конвертированных ставок доходности в иностранной валюте вычисляется по следующей формуле

$$q_{currency} = \max(\delta_{currency}^{tod}; \Delta_{currency}^{tod}),$$

где

$$\delta_{currency}^{tod} = \theta \cdot \delta_{currency}^{prev\ day} + (1 - \theta) \Delta_{currency}^{prev\ day},$$
$$\Delta_{currency}^{tod} = \left| r_{USD}^{CURR}(\tau | f x_{CURR}^{USD,low}(\tau)) - r_{USD}^{CURR}(\tau | f x_{CURR}^{USD,high}(\tau)) \right|,$$

значения $f x_{CURR}^{USD,low}(\tau)$, $f x_{CURR}^{USD,high}(\tau)$ равняются наименьшему и наибольшему форвардному курсу конвертации валют на срочность τ , наблюдавшемуся на рынке в соответствующую дату;

- е) В случае оценки по методу смещенного дисконтированного денежного потока, ставка доходности кривой еврооблигаций РФ в иностранной валюте определяется с помощью конвертации ставок доходности R_{t_i} из пункта 5.4. Методики по формуле из пункта а) настоящего Приложения.

Приложение 3

Оценка базовой кривой доходности модели Смита-Уилсона

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ:

База расчета — список государственных облигаций, данные о ходе торгов по которым используются для расчёта G-кривой.

Бескупонная доходность — доходность к погашению дисконтной облигации

Кривая бескупонной доходности (КБД) — зависимость бескупонной доходности от срока дисконтной облигации для однородных долговых обязательств; функция, задающая срочную структуру процентных ставок

Момент времени — число, равное количеству дней, прошедших от выбранной точки начала отсчета, выраженное в днях.

Срочная структура процентных ставок

Текущий момент времени, измеряется в годах

$$s$$

Момент в будущем, на который производится прогноз, измеряется в годах

$$t \geq s$$

Процентная ставка (бескупонная доходность, действующая в момент s на момент t)

$$r_s(t)$$

Коэффициент дисконтирования

$$D_s(t) = [1 + r_s(t)]^{t-s}$$

Непрерывная процентная ставка

$$y_s(t) = \frac{\log[D_s(t)]}{t - s}$$

Форвардная ставка (мгновенная)

$$f_s(t) = \frac{d}{dt}[y_s(t) \cdot (t - s)]$$

Предельная форвардная ставка, равная долгосрочному прогнозу номинальной ставки

$$\omega = \log[(1 + (3.0 + 4.4)\%)] = 7.14\%$$

Приведенный коэффициент дисконтирования

$$d_s(t) = e^{\omega(t-s)} D_s(t)$$

Функция ядра Z

Параметр скорости сходимости

$$\alpha = 0.05$$

Функция ядра

$$Z(u, v) = \alpha \min(u, v) - 0.5(e^{-\alpha|u-v|} - e^{-\alpha(u+v)})$$

Матрицы и векторы

Везде далее матрицы и векторы выделяются жирным шрифтом

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Операция транспонирования определена для матриц и векторов

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a^* = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$$

Операции сложения матрицы или вектора со скалярной переменной являются поэлементными

$$A + b = \begin{bmatrix} a_{11} + b & a_{12} + b & \dots & a_{1n} + b \\ a_{21} + b & a_{22} + b & \dots & a_{2n} + b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b & a_{m2} + b & \dots & a_{mn} + b \end{bmatrix} \quad a + b = \begin{bmatrix} a_1 + b \\ a_2 + b \\ \vdots \\ a_m + b \end{bmatrix}$$

Операция сложения матрицы и вектора производятся <<повекторно>>

$$A + c = \begin{bmatrix} a_{11} + c_1 & a_{12} + c_1 & \dots & a_{1n} + c_1 \\ a_{21} + c_2 & a_{22} + c_2 & \dots & a_{2n} + c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + c_m & a_{m2} + c_m & \dots & a_{mn} + c_m \end{bmatrix}$$

Операции умножения матрицы на матрицу, вектор или скаляр определены канонически.

Скалярные операции, производимые поэлементно над компонентами матрицы или вектора, обозначаются квадратными скобками

$$\exp[a] = \begin{bmatrix} \exp(a_1) \\ \exp(a_2) \\ \vdots \\ \exp(a_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1} \\ e^{a_2} \\ \vdots \\ e^{a_m} \end{bmatrix}$$

Скалярные операции от двух переменных, производимые поэлементно над компонентами двух векторов, обозначаются квадратными скобками

$$F[a, b] = \begin{bmatrix} F(a_1, b_1) & F(a_1, b_2) & \dots & F(a_1, b_n) \\ F(a_2, b_1) & F(a_2, b_2) & \dots & F(a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(a_m, b_1) & F(a_m, b_2) & \dots & F(a_m, b_n) \end{bmatrix}$$

Операция получения квадратной матрицы с диагональными элементами от вектора a обозначается

$$\text{diag}(a) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_m \end{bmatrix}$$

Порядок формирования базы расчетов

В базы расчетов заведомо не включаются выпуски, содержащие не фиксированный размер или дату выплаты. Таким образом, для каждой бумаги из базы расчетов должны быть известны размеры всех купонных выплат (в том числе амортизаций и погашений), а также даты запланированных выплат.

В базе расчетов должны быть использованы выпуски, для которых частота одновременно наблюдаемых котировок со стороны заявок на продажу и со стороны заявок на покупку не меньше 80%. В модели используются данные соответствующих лучших цен. Если одна из цен не установлена, то цена на бумагу считается ненаблюдаемой. Из базы расчетов исключаются выпуски со сроком до погашения менее 30 дней.

Непараметрическая модель

Непараметрическая модель допускает две возможных поставки, результатом которых является описываемая форма кривой.

Функциональная постановка

В основе функциональной постановки лежат два базовых предположения относительно свойств (вида, формы) функции дисконтирования.

1. Кривая должна обладать определенной степенью гладкости.
2. Динамика кривой должна быть достаточно гладкой, то есть текущая кривая должна быть близка (в некотором смысле) к прогнозу, полученному на предыдущем шаге расчетов.

Оба требования к кривой могут быть формализованы в виде задачи минимизации в среднем взвешенной суммы квадратов второй и первой производных от невязки прогноза и текущего значения функции дисконтирования.

Помимо предположения о форме функции дисконтирования используется допущение о том, что наблюдаемые значения цен определены неточно.

Наблюдаемые цены не обязаны в точности совпадать с ценами теоретическими, рассчитанными по функции дисконтирования. Данное предположение может быть формализовано в виде задачи минимизации взвешенного квадрата невязки цен с использованием меры точности.

На каждом шаге расчета решается задача многокритериальной (двухкритериальной) оптимизации.

1. Первый критерий состоит в гладкости и сходимости кривой.
2. Второй критерий состоит в близости наблюдаемых цен и теоретических цен.

Для решения задачи применяется метод множителей Лагранжа. В такой постановке задача допускает аналитическое решение, формальной записью которого является кривая описываемой непараметрической модели.

Вероятностная постановка

В основе вероятностной постановки лежит предположение о случайности поведения форвардной ставки.

Форвардная ставка представляется в виде двумерного стационарного Гауссовского случайного поля.

1. Первая переменная поля определяет момент времени, в который производится прогноз.
2. Вторая переменная определяет тот момент времени, на который производится прогноз.

При фиксированной первой переменной (что есть в некоторый заданный момент времени) форвардная ставка является Гауссовским процессом.

Относительно этого Гауссовского процесса делается предположение о том, что он является процессом Орнштейна-Уленбека, таким образом, подчиняется модели Вайсичека.

При фиксированной второй переменной делается предположение о том, что процесс, полученный в данном сечении, является броуновским движением. Наблюдаемые цены содержат случайную ошибку, являющуюся несмещенным белым шумом.

В каждый момент времени прогнозируемая форвардная кривая подчиняется модели Вайсичека, а динамика прогноза во времени является броуновским движением. Наблюдаемые цены содержат случайную несмещенную ошибку.

На основании данных предположений, а также допуская разложение функции дисконтирования в ряд Тейлора до линейного члена, строится вероятностная постановка, к которой в явном виде применим фильтр Калмана.

Обработка данных

Для расчета срочной структуры процентных ставок используется информация о заявках, поданных в Режиме основных торгов с выпусками, включенными в базу расчета.

Моментом фиксации заявок s_n является начало следующего (астрономического) часа внутри торгового дня.

Цены облигаций определяются после обработки последней сделки, совершенной до момента фиксации.

В момент s_n фиксируются активные заявки по каждому из выпусков, входящих в базу расчета. Если по некоторому выпуску i имеются заявки на покупку, то определяется цена покупки bid_i , как наибольший ценовой уровень заявок на покупку.

Аналогично фиксируется цена продажи ask_i , как наименьший ценовой уровень заявок на продажу.

Цена продажи и цена покупки выражаются в процентах от непогашенной части номинальной стоимости облигации и учитывают накопленный купонный доход.

В момент фиксации s_n выпуск считается ненаблюдаемым, если одна из двух цен отсутствует.

Для наблюдаемых выпусков расчет средней цены производится с использованием цены продажи и цены покупки

$$p_i = 0.5(ask_i + bid_i)$$

Для предыдущего торгового дня определяется дневной параметр меры точности выпуска, как медианное значение спреда в результате измерений предыдущего торгового дня:

$$m_i^{(prev\ day)} = 0.5(\text{median}(ask_i^{(prev\ day)} - bid_i^{(prev\ day)}))$$

На основании полученной в предыдущий момент фиксации цен s_{n-1} меры точности выпуска δ_i для выпуска i новая мера точности выпуска определяется с использованием экспоненциального фильтра с параметром $\theta = 0.95$

$$\delta_i = \theta \cdot \delta_i + (1 - \theta) \cdot m_i^{(prev\ day)}$$

Определяется мера точности наблюдаемой цены

$$q_i = \max(\delta_i, 0.5(\text{ask}_i - \text{bid}_i))$$

Матричное представление данных

На момент фиксации заявок

- Известно количество k выпусков, для которых наблюдаются цены. Все остальные выпуски в процедуре пересчета не участвуют.
- Для каждой облигации определена цена $p_i, i = 1 \dots k$. Упорядоченные цены облигаций образуют вектор цен p размерности $k \times 1$.
- Для каждой облигации определена мера точности $q_i, i = 1 \dots k$. Упорядоченные в соответствии с ценами облигаций элементы q_i образуют вектор меры точности q размерности $k \times 1$.
- Суммарное количество уникальных (без повторений) дат будущих выплат по всем облигациям равно m .
- Объединением всех дат выплат по всем облигациям обозначается $u_j, j = 1 \dots m$. Таким образом, для любого $j = 1 \dots m$ существует как минимум один выпуск с выплатой в момент u_j . Упорядоченные даты выплат образуют вектор u размерности $m \times 1$.
- Матрица выплат $C = [c_{ij}]$ размерности $m \times k$ задается поэлементно
 - a. Если для выпуска i на дату u_j не существует выплаты, то $c_{ij} = 0$;
 - b. Если для выпуска i на дату u_j существует выплата, c_{ij} равно величине данной выплаты по облигации, выраженной в процентах от непогашенной части номинальной стоимости облигации.

На момент фиксации цен s_n внешними входными переменными являются u, C, p_n, q_n .

Внутренними входными переменными являются

- вектор дат прогноза t ,
- предшествующий момент фиксации цен s_{n-1} ,
- вектор d_{n-1} приведенной функции дисконтирования в точках t ,
- ковариационная матрица R_{n-1} приведенной функции дисконтирования в точках t .

Инициализация внутренних входных переменных

- Расчет функции дисконтирования производится дискретно. Для реализации фильтра Калмана необходимо определить временную сетку t — вектор дат в будущем, для которого будет производиться расчет значений кривой. Размерность вектора равна $l \times 1$. Для получения достаточно точного результата желательно, чтобы в вектор входили все даты выплат по облигациям из базы расчета ($u \subset t$). Также желательно иметь как минимум один достаточно большой (более 50 лет) элемент сетки t для обеспечения точной интерполяции кривой в случае появления выпусков с дальними датами выплат.
- Начальный вектор приведенных коэффициентов дисконтирования d_0 размерности $l \times 1$ заполняется единицами.

- Начальная матрица ковариации R_0 размерности $l \times l$ заполняется нулями.
- Параметр s_0 определяется минимальным ($s_0 < s_1$) при условии, что рассчитанные модельные (теоретические) значения цен на первом шаге отличались от наблюдаемых цен не более, чем на величину половины bid-ask спреда¹²:

$$|p_1 - C^* D_1[u]| \leq q_1$$

Постоянными входными параметрами являются α, ω и параметр сглаживания $\lambda = 1000$

Результатами работы процедуры пересчета кривой дисконтирования являются:

- вектор новых значений d_n приведенной функции дисконтирования в точках t ,
- новая ковариационная матрица R_n приведенной функции дисконтирования в точках t .

Расчет непараметрической модели

Приведенная матрица выплат на дату s_n определяется по формуле

$$Q_n = \text{diag}(\exp[-\omega(u - s_n)]) \cdot C$$

Ковариационная матрица ошибок имеет вид $N_n = \lambda \cdot \text{diag}(q)$

Ковариационная функция шага динамики имеет вид

$$M_n(t_1, t_2) = \frac{(s_n - s_{n-1})}{\alpha^2} \cdot Z(t_1 - s_n, t_2 - s_n)$$

Согласно непараметрической модели, уравнения шага динамики и измерения приведенной случайной функции дисконтирования $d_n(t)$ в момент s_n на произвольную дату t имеют вид¹³

$$\begin{cases} d_n(t) = 1 + d_{n-1}(t) - d_{n-1}(s_n) + v_n(t) \\ p_n = Q_n^* d_n[u] + e_n \end{cases}$$

с начальным условием $d_0(t) \equiv 1$. Случайные переменные имеют распределение

$$\begin{cases} v_n(t) \sim \mathcal{N}(0, M_n(t, t)) \\ e_n \sim \mathcal{N}(0, N_n) \end{cases}$$

Для расчета шага динамики фильтра Калмана используется интерполяция среднего приведенной функции дисконтирования $d_{n-1}(t)$ и ее ковариационной матрицы $R_{n-1}(t, t)$ на секте t по их дискретной аппроксимации d_{n-1} и R_{n-1} соответственно. Рассчитываются следующие значения:

$$d_{n-1}(s_n), R_{n-1}(s_n, s_n), R_{n-1}[t, s_n], R_{n-1}[s_n, t].$$

Шаг динамики состоит в вычислении прогноза вектора коэффициентов дисконтирования d_{n-0} и матрицы ковариации R_{n-0} по формулам

¹² Модель предполагает, что производится предварительный расчет на исторических данных для более точной работы в будущем. Поэтому при наличии глубокой истории допускается произвольный выбор данного параметра при условии $s_1 - 60 < s_0 < s_1 - 1$

¹³ Данные формулы носят теоретический характер, в расчетах не применяются

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n-0} &= \mathbf{1} + \mathbf{d}_{n-1} - \mathbf{d}_{n-1}(s_n) \\ \mathbf{R}_{n-0} &= \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{R}_{n-1}[\mathbf{t}, s_n] - \mathbf{R}_{n-1}[s_n, \mathbf{t}] + \mathbf{R}_{n-1}(s_n, s_n) + \mathbf{M}_n[\mathbf{t}, \mathbf{t}] \end{aligned}$$

Аналогично для расчета этапа измерения фильтра Калмана используется интерполяция прогноза среднего приведенной функции дисконтирования $d_{n-0}(t)$ и ее ковариационной матрицы $R_{n-0}(t, t)$ на секте t по их дискретной аппроксимации d_{n-0} и R_{n-0} соответственно. Рассчитываются следующие значения

$$\mathbf{d}_{n-0}[\mathbf{u}], \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{t}, \mathbf{u}], \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{t}].$$

Этап измерения состоит в вычислении вектора коэффициентов дисконтирования d_n и матрицы ковариации R_n по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_n &= \mathbf{d}_{n-0} + \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{t}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n [\mathbf{Q}_n^* \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n + \mathbf{N}_n]^{-1} (\mathbf{p}_n - \mathbf{Q}_n^* \mathbf{d}_{n-0}[\mathbf{u}]) \\ \mathbf{R}_n &= \mathbf{R}_{n-0} + \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{t}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n [\mathbf{Q}_n^* \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n + \mathbf{N}_n]^{-1} \mathbf{Q}_n^* \mathbf{R}_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{t}] \end{aligned}$$

После фиксации цен в момент s_n для получения значений доходности на дату τ производится интерполяция функции $d_n(\tau)$ по её дискретной аппроксимации d_n , заданной в точках t . Откуда значение функции дисконтирования на моменты τ равно

$$\mathbf{D}_n(\tau) = e^{-\omega(\tau-s_n)} \mathbf{d}_n(\tau)$$

Значение бескупонной доходности, действующей в момент s_n на момент τ равно

$$r_n(\tau) = e^{-\omega} \cdot (\mathbf{d}_n(\tau))^{(\tau-s_n)^{-1}} - 1.$$